



تمرینات درس ریاضیات عمومی ۲ - رشته مهندسی برق

مدرس: حسینی

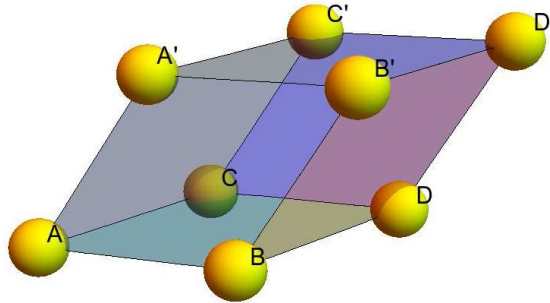
مهلت تحویل: ۱۴۰۴/۰۳/۱۳

(۱) رویه‌های زیر را رسم و توصیف کنید.

(الف) $x^2 - y^2 - z^2 - 4x - 4y = 0$ ؛ (ب) $\rho = 4 \sec \phi$

(ت) $z^2 = r^2 + (r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}$ ؛ $\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{4}, \\ \rho = 2a \sin \phi \end{cases}$ (پ)

(۲) یک متوازی السطوح دارای رأس‌های $A = (0, 0, 0)$ ، $B = (1, 1, 1)$ ، $C = (2, 3, 4)$ ، $A' = (3, 4, 8)$ و اضلاع AB و AA' است.



(الف) مختصات نقطه D را طوری بیابید که $ABCD$ یک متوازی الاضلاع باشد.

(ب) مساحت متوازی الاضلاع $ABCD$ چقدر است؟

(پ) حجم متوازی السطوح چقدر است؟

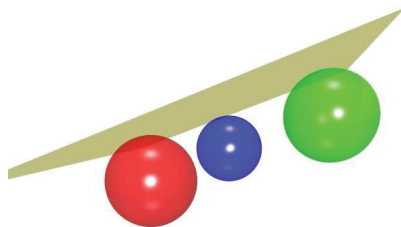
(ت) ارتفاع متوازی السطوح با قاعده $ABCD$ (کف) و سقف $A'B'C'D'$ را به دست آورید.

(۳) فرض کنید فاصله نقطه P از خط AB برابر d باشد. نشان دهید مقدار d از رابطه

$$d = \frac{|(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_P) \times (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_P)|}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|},$$

نتیجه می‌شود که در آن $\mathbf{r}_A$ ، $\mathbf{r}_B$ و $\mathbf{r}_P$ به ترتیب بردارهای مکان نقاط A ، B و P هستند.

(۴) معادله صفحه‌ای را بیابید که به کره‌های به مراکز $A = (1, 2, 0)$ ، $B = (4, 5, 0)$ و $C = (1, 3, 2)$ و شعاع ۱ از یک طرف مماس باشد.



(۵) نقاط $P_1(1, 0, 2)$ و $P_2(-1, 2, 0)$ و صفحه M به معادله $2x - 4y + z = 10$ را در نظر بگیرید.

(الف) مقدار c را طوری بیابید که نقطه $P_3(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, c)$ روی صفحه M واقع شود؛

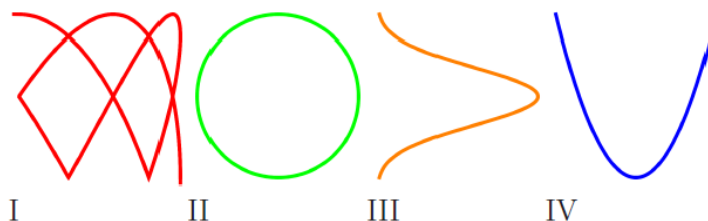
(ب) معادله صفحه N را چنان بیابید که شامل نقاط P_1 و P_2 بوده و بر صفحه M عمود باشد؛

(پ) معادلات پارامتری خط ℓ روی صفحه M و عمود بر صفحه N را چنان بیابید که از نقطه P_3 بگذرد.

(۶) در جاهای خالی، منحنی‌های مسطح متناظر با خم‌های پارامتری $\vec{r}$ داده شده را مشخص کنید و در صورتی که هیچ مطابقتی وجود نداشته باشد، حرف O را وارد کنید.

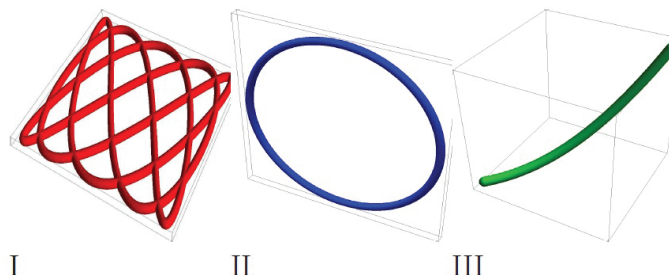
(الف)

$\vec{r}(t) =$	O-IV
(e^{-t^2}, t)	
$(\cos(t), \sin(t))$	
$(\cos(3t) , \sin(5t))$	
$(2t, 3t)$	
$(t, t^2 + 1)$	



(ب)

$\vec{r}(t) =$	O-III
$(\cos(3t), \sin(5t), 0)$	
(t, t, t^2)	
$(\cos(t), 0, \sin(t))$	
$(\sin(t), \sin(t), \sin(t))$	



(۷) سیاره زمین را به شکل کره‌ای واحد که در مرکز یک فضای سه بعدی قرار گرفته است، تصور کنید. شهاب سنگی از نقطه $P(0, 4, 3)$ در امتداد مسیر

$$\vec{r}(t) = ((4 - t) \sin t, (4 - t) \cos t, 3 - t),$$

در حال نزدیک شدن به زمین است.

(الف) شهاب سنگ چه زمانی و کجا با زمین برخورد می‌کند.



(ب) سرعت شهاب سنگ در لحظه برخورد چقدر بوده است؟

(۸) با استفاده از سنسورهای نصب شده روی یک فضاپیما، مشخص شد سرعت آن در زمان دلخواه $t \geq 0$ ، در رابطه $\vec{v}(t) = t\vec{i} + (2t^{3/2})\vec{j} + (2t^2)\vec{k}$ صدق می‌کند. مطلوبست محاسبه هر یک از موارد زیر در زمان دلخواه $t \geq 0$.

(الف) سرعت فضاپیما؛

(ب) بردار $\frac{d\vec{v}}{ds}$ ؛

(پ) مسافت طی شده توسط فضاپیما از لحظه $t = 0$ تا لحظه $t = T$ ؛

(ت) موقعیت فضاپیما، $\vec{r}(t)$ ، در صورتی که موقعیت آن در لحظه $t = 0$ ، برابر

$$\vec{r}(t = 0) = \frac{1}{4}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k},$$

باشد.

(۹) فرض کنید C مکعب پیچ خورده

$$x = t, \quad y = \frac{1}{4}t^2, \quad z = \frac{1}{3}t^3,$$

باشد. در این صورت

(الف) انحنای ماکزیمم C را بیابید.

(ب) تاب و بردارهای $\vec{T}$ ، $\vec{N}$ و $\vec{B}$ سه وجهی حرکت C را در مبدأ و $(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ بیابید.
(پ) تاب ماکزیم C را بیابید.

۱۰) حد توابع زیر را در نقاط داده شده، حساب کنید یا دلیل عدم وجود آن را توضیح دهید.

$$(i) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,1)} \frac{x \sin y - y \cos z}{|x| + |y| + |z|}, \quad (ii) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \arctan\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$(iii) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (-1,1,0)} \frac{(x+1)^3(y-1)^2}{(x+1)^6 + (y-1)^4 + z^2}, \quad (iv) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \sin \frac{1}{x}.$$

۱۱) فرض کنید

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^4 + y^4 + z^4}, & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0, & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

در این صورت، $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}$ و $\frac{\partial f}{\partial z}$ در $(0, 0, 0)$ را بیابید. آیا f در $(0, 0, 0)$ پیوسته است؟ در مورد پیوستگی $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}$ و $\frac{\partial f}{\partial z}$ در $(0, 0, 0)$ نیز بحث کنید.

۱۲) تابع با ضابطه $f(x, y, z) = (x^2 + z^2) \sin \frac{\pi xy}{4} + yz^2$ و نقطه $P_0(1, 1, -1)$ را در نظر بگیرید
(الف) گرادین f در P_0 را بیابید.

(ب) معادله صفحه مماس در P_0 بر سطح تراز f مار بر P_0 را بیابید.

(پ) اگر یک پرند از P_0 با تندی ۵ عبور کند و مستقیماً به سوی نقطه $(1, -1, 2)$ برود، میزان تغییر f دیده شده توسط پرند وقتی از P_0 می‌گذرد چقدر است؟

(ت) پرند در چه جهتی از P_0 با تندی ۵ پرواز کند که بیشترین میزان افزایش f را تجربه کند.

۱۳) فرض کنید

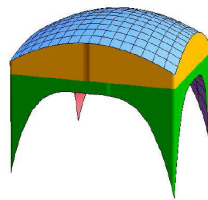
$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^4 + y^4}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(الف) مقدار $\vec{\nabla} f(0, 0)$ را بیابید.

(ب) با استفاده از تعریف مشتق جهتی، مقدار $\vec{\nabla}_u f(0, 0)$ را که در آن $u = \frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}}$ ، حساب کنید.

۱۴) حجم بزرگترین مکعب مستطیلی که اضلاع آن موازی محورهای مختصات بوده و در بیضی‌گون $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ قابل محاط است را بیابید.

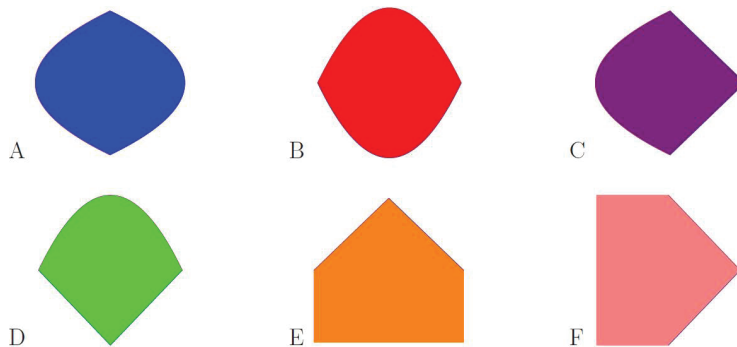
۱۵) ضخامت ناحیه محصور شده توسط توابع $f_1(x, y) = 10 - 2x^2 - 2y^2$ و $f_2(x, y) = -x^4 - y^4 - 2$ با $f(x, y) = f_1(x, y) - f_2(x, y)$ مشخص شده است. تمامی نقاط بحرانی f و کمینه ضخامت سراسری f را بیابید.



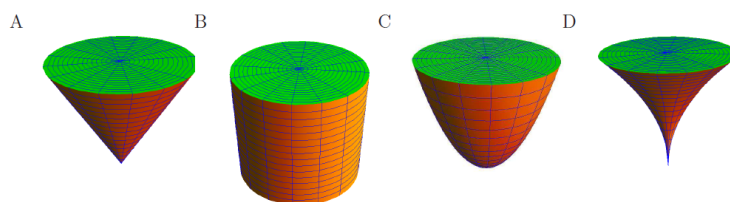
(۱۶) مکانی روی شهاب سنگ بیضوی $g(x, y) = 5x^2 + y^2 + 3z^2 = 9$ بیابید به طوری که دمای شهاب سنگ که با رابطه $f(x, y) = 750 + 5x - 2y + 9z$ داده شده است، دارای بیشینه مقدارش باشد.

(۱۷) در جاهای خالی، ناحیه متناظر با انتگرال‌های چندگانه داده شده را مشخص کنید.

انتگرال	A-F
$\int_{-1}^1 \int_{-1}^{2- y } f(x, y) dx dy$	
$\int_{-1}^1 \int_y^{2- y } f(x, y) dx dy$	
$\int_{-1}^1 \int_{x^2}^{2-x^2} f(x, y) dy dx$	
$\int_{-1}^1 \int_{ x }^{2-x^2} f(x, y) dy dx$	
$\int_{-1}^1 \int_y^{2-y^2} f(x, y) dx dy$	
$\int_{-1}^1 \int_{-1}^{2- x } f(x, y) dy dx$	



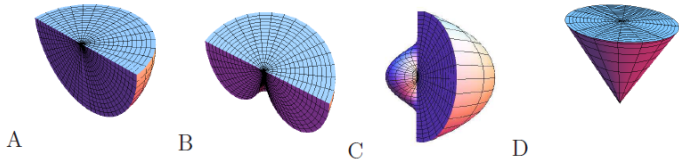
انتگرال	A-D
$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^1 r dz dr d\theta$	
$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^1 r dz dr d\theta$	
$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{\sqrt{r}}^1 r dz dr d\theta$	
$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 r dz dr d\theta$	



(۱۸) انتگرال مکرر

$$I = \iint_R \frac{y^2}{x^3} \sqrt{xy} \cos(xy) dx dy,$$

انتگرال	A-D
$\int_0^{\sqrt{2}\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{1/\cos\phi} \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$	
$\int_0^{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{\sin\phi} \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$	
$\int_0^{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^1 \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$	
$\int_0^{\sqrt{2}\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi-\theta} \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$	



که در آن R ناحیه محدود به منحنی‌های $xy = 0$ ، $xy = \pi/2$ ، $y = x$ و $y = \sqrt{2}x$ در ربع اول صفحه xy است، را در نظر بگیرید.

(الف) ناحیه انتگرال‌گیری R را در صفحه xy رسم کنید.

(ب) تبدیل مختصات $u^2 = xy$ و $v^2 = y/x$ ، ناحیه R در صفحه xy را به ناحیه S در صفحه uv تصویر می‌کند. I را پس از رسم ناحیه S ، محاسبه کنید.

(۱۹) انتگرال‌های زیر را در نواحی داده شده حساب کنید.

$$T \text{ مثلی به رئوس } (0,0), (1,0), (1,1) \text{ است.} \quad \iint_T \frac{xy}{1+x^2} dA \quad (i)$$

$$R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\sqrt{2}}{\pi} \leq x < \infty, 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \right\} \quad \iint_R \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dA \quad (ii)$$

$$D \text{ مینیم دو ناحیه توپر محدود به سطوح } x^2 + y^2 + z^2 = 6a^2 \text{ و } \iiint_D (x^2 + y^2) dv \quad (iii)$$

$$z = \frac{1}{a}(x^2 + y^2) \text{ که در آن } a \text{ یک ثابت مثبت است، می‌باشد.}$$

(iv) حجم محدود به ناحیه‌ای در $\mathbb{R}^3$ متشکل از نقاطی که داخل مخروط $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ و بالای کره $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ قرار دارند.

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} \sqrt{1-y^2} dy dx \quad (v)$$

(۲۰) فرض کنید S کره‌ای به معادله $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ ($a > 0$) باشد. نشان دهید مخروط C به معادله $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ درون S را به دو قسمت تقسیم می‌کند به‌طوری‌که حجم یکی سه برابر حجم دیگری است.

$$(۲۱) \text{ میدان برداری } \vec{F}(x,y,z) = z\vec{i} + (y+1)\vec{j} + x\vec{k} \text{ را در نظر بگیرید.}$$

(الف) نشان دهید $\vec{F}$ یک میدان پایستار است. سپس، پتانسیل متناظر با آن را تعیین کنید.

(ب) مقدار انتگرال $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ را در امتداد منحنی

$$C: x(t) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad y(t) = 2t, \quad z(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

از نقطه $(0, 0, 1)$ تا نقطه $(1, 2, 0)$ به دست آورید.

(۲۲) مقادیر a و b را چنان بیابید که میدان برداری

$$\vec{F}(x, y, z) = ax \ln(z) \vec{i} + by^2 z \vec{j} + \left(\frac{x^2}{z} + y^3 \right) \vec{k},$$

بقا باشد. اگر C خط مستقیم از نقطه $(1, 1, 1)$ به نقطه $(2, 1, 2)$ باشد، مقدار انتگرال

$$\int_C 2x \ln(z) dx + 2y^2 z dy + y^3 dz,$$

را بیابید.

(۲۳) فرض کنید M ناحیه‌ای در $\mathbb{R}^3$ متشکل از نقاطی است که داخل مخروط $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ و بالای کره $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ قرار دارد. حجم M را یکبار به طور مستقیم و بار دیگر به کمک قضیه دیورژانس (با میدان برداری $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$) محاسبه کنید.

(۲۴) فرض کنید میدان برداری $F: \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ به صورت $F(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$ تعریف شده است که در آن $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. همچنین فرض کنید S رویه به معادله $|x| + |y| + |z| = 1$ باشد که جهت قائم یکه بر آن رو به خارج است. انتگرال $\iint_S \vec{F} \cdot n d\sigma$ را محاسبه کنید.

(۲۵) مقدار ماکزیم $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ را در صورتی بیابید که

$$\vec{F} = (xy^2, 3z - xy^2, 4y - x^2y)$$

و C یک منحنی بسته ساده در صفحه $x + y + z = 1$ باشد که از بالا روی محور z خلاف جهت عقربه‌های ساعت جهت‌دار است. چه منحنی C ای این ماکزیم را نتیجه می‌دهد.

«موفق باشید»