به نام خدا

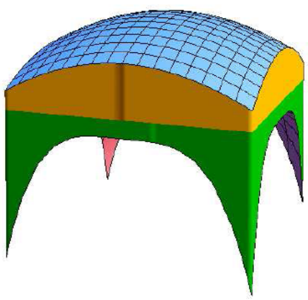
تمرینات درس ریاضیات عمومی۲ ـ رشته مهندسی کامپیوتر

سری چهارم: ضرایب لاگرانژ ـ انتگرال‌های چندگانه ـ انتگرال خط

مدرّس: حسینی مهلت تحویل: ۱۴۰۳/۰۳/۱۶

---

۱) ضخامت ناحیه محصور شده توسط توابع $f_1(x,y) = 10 - 2x^2 - 2y^2$ و $f_2(x,y) = -x^4 - y^4 - 2$ با $f(x,y) = f_1(x,y) - f_2(x,y)$ مشخص شده است.



تمامی نقاط بحرانی f و کمینه ضخامت سراسری f را بیابید.

۲) مکانی روی شهاب سنگ بیضوی $g(x,y) = 5x^2 + y^2 + 3z^2 = 9$ بیابید به‌طوری‌که دمای شهاب سنگ که با رابطه $f(x,y) = 750 + 5x - 2y + 9z$ داده شده است، دارای بیشینه مقدارش باشد.

۳) انتگرال مکرر

$$I = \iint\limits_R \frac{y^2}{x^3}\sqrt{xy}\cos(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

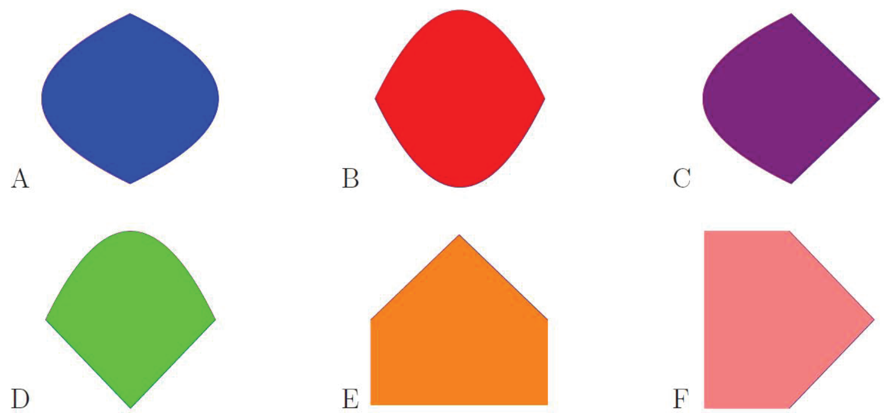
که در آن R ناحیه محدود به منحنی‌های $xy = 0$، $xy = \pi/2$، $y = x$ و $y = 4x$ در ربع اول صفحه xy است، را در نظر بگیرید.

(الف) ناحیه انتگرال‌گیری R را در صفحه xy رسم کنید.

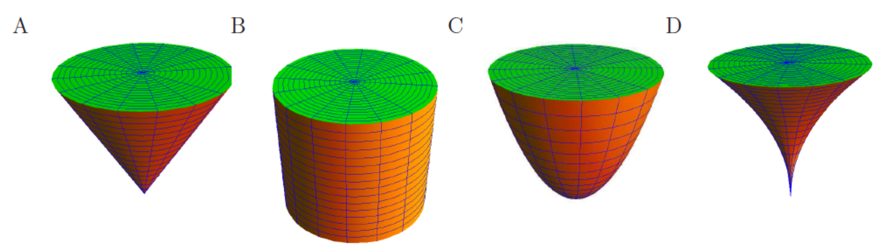
(ب) تبدیل مختصات $u^2 = xy$ و $v^2 = y/x$، ناحیه R در صفحه xy را به ناحیه S در صفحه uv تصویر می‌کند. I را پس از رسم ناحیه S، محاسبه کنید.

۴) در جاهای خالی، ناحیه متناظر با انتگرال‌های چندگانه داده شده را مشخص کنید.

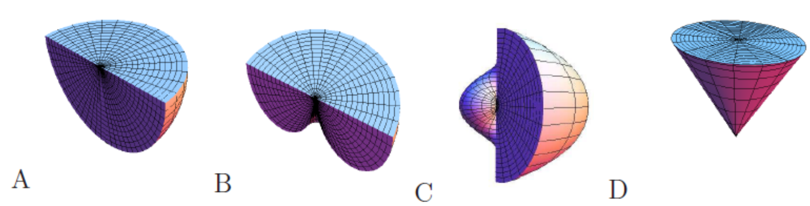
انتگرال	A–F
$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{2-\lvert y\rvert} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$	
$\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{2-\lvert y\rvert} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$	
$\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{2-x^2} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$	
$\int_{-1}^{1}\int_{\lvert x\rvert}^{2-x^2} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$	
$\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{2-y^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$	
$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{2-\lvert x\rvert} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$	



انتگرال	A–D
$\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_r^{1} r\mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$	
$\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_{r^2}^{1} r\mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$	
$\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_{\sqrt{r}}^{1} r\mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$	
$\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_0^{1} r\mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$	



انتگرال	A–D
$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{1/\cos\phi} \rho^2\sin\phi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta$	
$\int_0^{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{\sin\phi} \rho^2\sin\phi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta$	
$\int_0^{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{1} \rho^2\sin\phi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta$	
$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi-\theta} \rho^2\sin\phi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta$	



۵) انتگرال‌های زیر را در نواحی داده شده حساب کنید.

(i) $\iint_T \frac{xy}{1+x^4}\mathrm{d}A$ ، T مثلثی به رئوس $(0,0)$، $(1,0)$ و $(1,1)$ است.

(ii) $\displaystyle\iint_R \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}A$ ، $R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\frac{2}{\pi}\le x<\infty,\ 0\le y\le\frac{1}{x}\right\}$

(iii) $\displaystyle\iiint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}v$ ، D مینیمم دو ناحیه توپر محدود به سطوح $x^2+y^2+z^2=6a^2$ و $z=\frac{1}{a}(x^2+y^2)$، که در آن a یک ثابت مثبت است، می‌باشد.

(iv) حجم محدود به ناحیه‌ای در $\mathbb{R}^3$ متشکل از نقاطی‌که داخل مخروط $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ و بالای کره $x^2+y^2+z^2=2$ قرار دارند.

(v) $\displaystyle\int_0^1\int_x^{\sqrt[3]{x}}\sqrt{1-y^4}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$

۶) فرض کنید $\mathcal{S}$ کره‌ای به معادله $x^2+y^2+z^2=2az$ $(a>0)$ باشد. نشان دهید مخروط $\mathcal{C}$ به معادله $x^2+y^2-z^2=0$ درون $\mathcal{S}$ را به دو قسمت تقسیم می‌کند به‌طوری‌که حجم یکی سه برابر حجم دیگری است.

۷) میدان برداری $\vec{F}(x,y,z)=z\vec{i}+(y+1)\vec{j}+x\vec{k}$ را در نظر بگیرید.

(الف) نشان دهید $\vec{F}$ یک میدان پایستار است. سپس، پتانسیل متناظر با آن را تعیین کنید.

(ب) مقدار انتگرال $\displaystyle\int_{\mathcal{C}}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$ را در امتداد منحنی

$$\mathcal{C}:\ x(t)=\frac{2t}{1+t^2},\quad y(t)=2t,\quad z(t)=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

از نقطه $(0,0,1)$ تا نقطه $(1,2,0)$ به‌دست آورید.

۸) مقادیر a و b را چنان بیابیدکه میدان برداری

$$\vec{F}(x,y,z)=ax\ln(z)\vec{i}+by^2z\vec{j}+\left(\frac{x^2}{z}+y^3\right)\vec{k},$$

بقا باشد. اگر $\mathcal{C}$ خط مستقیم از نقطه $(1,1,1)$ به نقطه $(2,1,2)$ باشد، مقدار انتگرال

$$\int_{\mathcal{C}}2x\ln(z)\mathrm{d}x+2y^2z\mathrm{d}y+y^3\mathrm{d}z,$$

را بیابید.

«موفق باشید»