به نام خدا

تمرینات درس حل عددی معادلات دیفرانسیل—رشته ریاضیات و کاربردها

سری اول: روش‌های تک‌گامی

مدرّس: حسینی

مهلت تحویل: ۱۴۰۳/۰۲/۲۶

---

۱) با معرفی بردار $u = [u_1\ u_2\ \cdots u_N]^T$، شکل برداری مساله مقدار اولیه

$$u_i' = \frac{\sigma}{(\Delta x)^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}), \quad u_i(0) = g(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

که در آن ضریب نفوذگرمایی $\sigma > 0$ و تابع اولیه $g(x)$ مشخص هستند و $u_0(t) = 0$، $u_{N+1}(t) = 0$ و $u_i(t) \approx u(x_i, t)$، را به‌شکل مساله خودگردان (۴.۱) بنویسید.

۲) جواب عمومی معادله تفاضلی

$$y_{n+2} - 2\alpha y_{n+1} + \alpha y_n = 1, \quad 0 < \alpha < 1,$$

را بیابید. سپس، نشان دهید

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{1-\alpha}.$$

۳) نتایج حاصل از به‌کارگیری روش اویلر برای حل مساله مقدار اولیه

$$y'(x) = x + 2y(x) + xy(x), \quad 0 \le x \le 1,$$
$$y(0) = 2,$$

در جدول زیر آمده است.

i	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
t_i	۰	۰/۰۱	۰/۰۲	۰/۰۳	۰/۰۴	۰/۰۵	۰/۰۶	۰/۰۷
y_i	۲	A	B	۲/۱۲۳۳	۲/۱۶۶۷	۲/۲۱۱۳	۲/۲۵۷۲	C

مقادیر A، B و C را تعیین کنید.

۴) روش اویلر ضمنی برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

$$y_1'(x) = y_2(x), \qquad y_1(0) = y_{1,0},$$
$$y_2'(x) = -y_1(x) - y_2(x), \quad y_2(0) = y_{2,0},$$

را در نظر بگیرید. نشان دهید به‌ازای هر طول‌گام مثبت و ثابت h جواب حاصل از روش، یعنی، $\begin{pmatrix} y_{1,n} \\ y_{2,n} \end{pmatrix}$، همگرا به صفر است هرگاه $n \to \infty$. آیا نتیجه مشابهی برای روش اویلر برقرار است؟ چرا؟

۵) روش عددی

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + (1-\theta)h, \theta y_n + (1-\theta)y_{n+1}),$$

برای حل مساله مقدار اولیه

$$y'(x) = f(x,y), \quad x_0 \leq x \leq \bar{x},$$
$$y(x_0) = y_0,$$

را در نظر بگیرید.

(الف) مرتبه روش را به‌دست آورید.

(ب) به‌ازای چه مقادیری از θ، روش همگراست.

(پ) به‌ازای $\theta = 0$ و $\theta = 1$، بازه پایداری روش را به‌دست آورید.

۶) (الف) نشان دهید خطای برشی موضعی حاصل از به‌کارگیری روش ذوزنقه‌ای

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h\big[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\big], \quad n = 0, 1, \dots, N,$$
$$y_0 = y(x_0),$$

روی مساله آزمون

$$y' = \xi y, \quad x_0 \leq x \leq \bar{x},$$
$$y(x_0) = y_0,$$

که در آن ξ یک مقدار مشخص است، در رابطه

$$\tau(x,h) = \frac{\phi(e^{\xi h}, \xi h)}{h} y(x),$$

که در آن $\phi(r,\alpha) = r - 1 - \frac{\alpha}{2}(r+1)$، صدق می‌کند.

(ب) آیا از قسمت (الف)، سازگاری روش نتیجه می‌شود؟ جواب خود را به‌طورکامل تشریح کنید.

(پ) ناحیه پایداری مطلق روش را به‌دست آورید.

۷) کرانی برای خطای سراسری (جامع) روش عددی

$$y_{n+1} = y_n + h\big[2f(x_n + \frac{h}{4}, y_n + \frac{h}{4}f_n) - f_n\big], \quad n = 0, 1, \dots, N,$$
$$y_0 = y(x_0),$$

که در آن $f_n = f(t_n, y_n)$، به‌دست آورید.

«موفق باشید»