



تمرینات درس مبانی آنالیز عددی- رشته ریاضیات و کاربردها

مدرس: حسینی

مهلت تحویل: ۱۴۰۴/۰۳/۱۰

(۱) الف) تقریبی برای $f(h)$ که در آن

$$f(h) = \frac{\sin(1+h) - \sin(1)}{h},$$

به ازای $h = 0.00351$ را در ماشینی که از روش گردکردن و حساب چهار رقمی استفاده می‌کند، به دست آورید.

(ب) مقدار این تقریب را در ماشینی که از روش برشی و حساب چهار رقمی استفاده می‌کند، به دست آورید.

توجه شود:

$$\sin(1/0.03) = 0.843088\ldots, \quad \sin(1/0.04) = 0.843625\ldots, \quad \sin(1) = 0.841470\ldots$$

(۲) تابع

$$f(x) = \frac{(\sin x - e^x) + 1}{x^2}, \quad x \neq 0,$$

را در نظر بگیرید که در آن آرگومان سینوس بر حسب رادیان است.

الف) تقریبی برای $f(0.123)$ را در ماشینی که از روش برشی و حساب چهار رقمی استفاده می‌کند، به دست آورید.

(ب) با استفاده از چندجمله‌ای مک لورن توابع سینوس و نمایی، یک تقریب درجه دوم برای $f(x)$ به دست آورید. سپس، با استفاده از آن مقدار $f(0.123)$ را محاسبه کنید.

(۳) فرض کنید کامپیوتری در اختیار دارید که تنها قادر به ذخیره اعداد بین $10^6 -$ و 10^6 است. به عبارت دیگر، اگر مقادیر محاسبه شده بیشتر از این اعداد باشند، خطای سرریز ظاهر می‌شود. مشکلات محاسبه مقدار واریانس اعداد $x_1 = 10^4$ ، $x_2 = 10^4 - 1$ و $x_3 = 10^4 + 1$ با استفاده از فرمول

$$v = \left(\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 x_i^2 \right) - \mu^2, \quad \mu = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 x_i,$$

در این کامپیوتر را بیان کنید. فرمول بالا را طوری بازنویسی کنید که مقدار واریانس این اعداد در این کامپیوتر قابل محاسبه باشد.

(۴) عدد حالت نسبی مساله زیر را بیابید. به ازای چه مقادیری از x مساله بد حالت است؟

$$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

توجه شود:

$$e^x - e^{-x} = 2 \sinh x$$

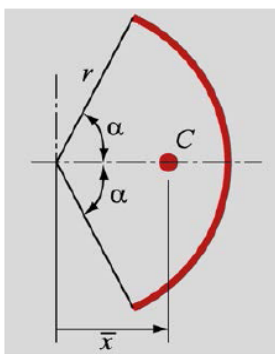
(۵) چرا محاسبه مقدار انتگرال

$$I(N) = \int_N^{N+1} \frac{dx}{1+x^2},$$

با استفاده از رابطه

$$I(N) = \arctan(N+1) - \arctan(N),$$

(۶)



مرکزگون یک قطاع دایره‌ای از رابطه $\bar{x} = \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$ که در آن α ، زاویه شعاع حامل r با محور قطبی است، به دست می‌آید. تقریبی برای α ، به ازای $\bar{x} = \frac{3r}{4}$ با استفاده از روش‌های زیر به دست آورید:

(الف) روش تنصیف (بازه اولیه را $[0.5, 1.5]$ در نظر گرفته و دو تکرار انجام دهید). حداقل تعداد تکرار لازم برای آنکه تقریب حاصل دارای ۴ رقم اعشار درست باشد، را بیابید.

(ب) روش تکرار ساده با استفاده از تقریب اولیه $\alpha_1 = 0.5$.

(۷) جواب تقریبی دستگاه معادلات غیرخطی زیر را با استفاده روش نیوتن و به ازای تقریب اولیه $(1, 1)$ به دست آورید. سه تکرار انجام دهید.

$$-2x_1^3 + 3x_1^2 + 4x_2 = 0,$$

$$5x_1^2 + 3x_2^2 - 69 = 0.$$

(۸) با ذکر دلیل مشخص کنید کدامیک از روش‌های تکراری

$$(a) \alpha = 2, x_{n+1} = -1 + x_n + x_n^2$$

$$(b) \text{ روش نیوتن برای } f(x) = x(1-x)^2, \alpha = 1$$

$$(c) \alpha = 1, x_{n+1} = x_n^2 + x_n^{-2} - 1$$

$$(d) \text{ روش نیوتن برای } f(x) = \sin(x), \alpha = \pi$$

برای محاسبه ریشه α ، به‌ازای انتخاب تقریب‌های اولیه مناسب، همگرایند. مرتبه همگرایی روش، در صورت همگرایی، را به‌دست آورید.

(۹) حداکثر اندازه گام h را برای جدول‌بندی تابع $\cos x$ در نقاط هم‌فاصله طوری بیابید که خطای حاصل از درونیابی خطی نابیشتر از $10^{-4} \times 0.5$ باشد؟

(۱۰) نشان دهید اگر $P(x)$ تابع f را در نقطه $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ و $Q(x)$ تابع f را در نقطه $x_1, x_2, \dots, x_n$ درونیابی کنند، آنگاه تابع

$$S(x) = P(x) + \frac{x_0 - x}{x_n - x_0} \cdot (P(x) - Q(x)),$$

تابع f را در $n+1$ نقطه $x_0, x_1, \dots, x_n$ درونیابی می‌کند.

(۱۱) فرض کنید $x_0, x_1, \dots, x_n$ نقاط متمایز باشند. نشان دهید

$$\sum_{i=0}^n x_i^{n+1} L_i(x_0) = (-1)^n \prod_{i=0}^n x_i.$$

(۱۲) ثابت کنید

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{w'(x_i)}.$$

$$w(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

(۱۳) تابع خطا به صورت

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

تعریف می‌شود. مقادیر این تابع به صورت جدول

x	۰/۰۵	۰/۱۰	۰/۱۵	۰/۲۰
$\operatorname{erf}(x)$	۰/۰۵۶۳۷	۰/۱۱۲۴۶	۰/۱۶۸۰۰	۰/۲۲۲۷۰

داده شده است.

(الف) $\operatorname{erf}(0.08)$ را با استفاده از درونیابی خطی تخمین بزنید.

(ب) تقریبی برای $\operatorname{erf}(0.08)$ ، با استفاده از چندجمله‌ای درونیاب نیوتن و همه نقاط جدول بیابید.

(۱۴) نشان دهید شکل دوم گرانیگاهی چندجمله‌ای درونیاب لاگرانژ به صورت

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{\beta_j}{x - x_j} f_j \bigg/ \sum_{j=0}^n \frac{\beta_j}{x - x_j},$$

است که در آن β_j ها، وزنهای گرانیگاهی هستند و به شکل زیر تعریف می‌شوند (۲۰ نمره)

$$\beta_j = 1/\ell'(x_j), \quad \ell(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

(۱۵) پارامترهای b و c را طوری بیابید که تابع نمایی $y = ce^{bx}$ برازش کمترین مربعات داده‌های زیر باشد.

x_i	۱	۳	۴	۶	۹	۱۵
f_i	۴	۳/۵	۲/۹	۲/۵	۲/۷۵	۲

(۱۶) طول گام بهینه را برای روش مشتق‌گیری عددی

$$f'(x_0) = \frac{-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)}{2h} + \frac{h^2}{3} f'''(\xi), \quad x_0 < \xi < x_2,$$

با هر دو هدف

$$|T(h)| = |R(h)|,$$

و

$$|T(h)| + |R(h)| = \text{minimum},$$

بیابید. سپس، با استفاده از روش عددی داده شده و طول گام بهینه به دست آمده با هدف $|T(h)| = |R(h)|$ ، تقریبی برای $f'(2/0)$ از داده‌های جدولی تابع $f(x) = \ln x$ به صورت

x_i	۲/۰	۲/۰۱	۲/۰۲	۲/۰۶	۲/۱۲
f_i	۰/۶۹۳۱۵	۰/۶۹۸۱۳	۰/۷۰۳۱۰	۰/۷۲۲۷۱	۰/۷۵۱۴۲

که با خطای گرد کردن $10^{-6} \times 5$ داده شده‌اند، بیابید.

(۱۷) فرض کنید

$$A(h) = \frac{-f(x+2h) + 4f(x+h) - 3f(x)}{2h}.$$

(الف) نشان دهید

$$f'(x) - A(h) = C_1 h^2 + C_2 h^3 + C_3 h^3 + \dots$$

سپس، C_1 را بیابید.

(ب) با استفاده از $A(h)$ و داده‌های

x_i	۰/۳۹۸	۰/۳۹۹	۰/۴۰۰	۰/۴۰۱	۰/۴۰۲
f_i	۰/۴۰۸۵۹۱	۰/۴۰۹۶۷۱	۰/۴۱۰۷۵۲	۰/۴۱۱۸۳۴	۰/۴۱۲۹۱۵

تقریبی برای $f'(۰/۳۹۸)$ به دست آورید. سپس، خطای تقریب را در صورتی که داده‌ها به طور دقیق گرد شده باشند، تخمین بزنید.

(۱۸) روش انتگرال‌گیری عددی نامتقارن

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{12} [5f(a) + 8f(b) - f(2b-a)] + E(f),$$

را که در آن $f \in C[a, 2b-a]$ ، در نظر بگیرید. نشان دهید:
(الف) روش برای تمام چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه دو دقیق است.
(ب) برای $f \in C^3[a, 2b-a]$ ، داریم

$$E(f) = \frac{(b-a)^4}{24} f'''(\xi), \quad \xi \in [a, 2b-a].$$

(۱۹) برای محاسبه مقدار تقریبی انتگرال $\int_0^1 e^{x^2} dx$ با قاعده

(الف) ذوزنقه‌ای مرکب،

(ب) سیمپسون مرکب،

و با دقت $\varepsilon = 10^{-6}$ ، بازه $[0, 1]$ حداقل به چند زیربازه باید تقسیم شود؟

(۲۰) ضرایب w_0, w_1 و w_2 را طوری تعیین کنید که فرمول انتگرال‌گیری

$$\int_0^1 \frac{f(x)dx}{\sqrt{x(1-x)}} \approx w_0 f(0) + w_1 f\left(\frac{1}{2}\right) + w_2 f(1),$$

دارای بالاترین درجه دقت باشد. سپس، با استفاده از آن تقریبی برای انتگرال زیر ارائه دهید

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^3}}.$$

(۲۱) با استفاده از نسخه مرکب فرمول انتگرال‌گیری گاوس-لژاندر دو-نقطه‌ای تقریبی برای انتگرال

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (\sin x + 5 \ln x + e^{x^2}) dx,$$

به دست آورید در صورتی که بازه $[\frac{1}{2}, 1]$ به پنج زیربازه مساوی تقسیم شود.

«موفق باشید»