



تمرینات درس حل عددی معادلات دیفرانسیل- رشته ریاضیات و کاربردها

مهلت تحویل: ۱۴۰۴/۰۳/۱۰

مدرس: حسینی

(۱) با معرفی بردار $u = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_N]^T$ ، شکل برداری مساله مقدار اولیه

$$u'_i = \frac{\sigma}{(\Delta x)^2} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}), \quad u_i(0) = g(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

که در آن ضریب نفوذ گرمایی $\sigma > 0$ و تابع اولیه $g(x)$ مشخص هستند و $u_{N+1}(t) = 0$ ، $u_0(t) = 0$ و $u_i(t) \approx u(x_i, t)$ را به شکل یک مساله مقدار اولیه خودگردان بنویسید.

(۲) جواب عمومی معادله تفاضلی

$$y_{n+2} - 2\alpha y_{n+1} + \alpha y_n = 1, \quad 0 < \alpha < 1,$$

را بیابید. سپس، نشان دهید

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{1}{1 - \alpha}.$$

(۳) نتایج حاصل از به کارگیری روش اویلر پیشرو برای حل مساله مقدار اولیه

$$y'(x) = x + 2y(x) + xy(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$y(0) = 2,$$

در جدول زیر آمده است.

i	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
t_i	۰	۰/۰۱	۰/۰۲	۰/۰۳	۰/۰۴	۰/۰۵	۰/۰۶	۰/۰۷
y_i	۲	A	B	۲/۱۲۳۳	۲/۱۶۶۷	۲/۲۱۱۳	۲/۲۵۷۲	C

مقادیر A، B و C را تعیین کنید.

(۴) روش عددی

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + (1 - \theta)h, \theta y_n + (1 - \theta)y_{n+1}),$$

برای حل مساله مقدار اولیه

$$y'(x) = f(x, y), \quad x_0 \leq x \leq \bar{x},$$

$$y(x_0) = y_0, \quad (۱)$$

را در نظر بگیرید.

(الف) مرتبه روش را به دست آورید.

(ب) به ازای چه مقادیری از θ ، روش همگراست.

(پ) به ازای $\theta = 0$ و $\theta = 1$ ، بازه پایداری روش را به دست آورید.

(۵) هر یک از موارد زیر در مورد یک روش تک گامی خطی را به طور دقیق توضیح دهید.

(الف) خطای برشی موضعی

(ب) خطای جامع

(پ) مرتبه همگرایی

(پ) مرتبه تجربی همگرایی

(۶) (الف) نشان دهید خطای برشی موضعی حاصل از به کارگیری روش دوزنقه ای روی مساله آزمون

$$y' = \xi y, \quad x_0 \leq x \leq \bar{x}, \\ y(x_0) = y_0,$$

که در آن ξ یک مقدار مشخص است، در رابطه

$$\tau(x, h) = \frac{\phi(e^{\xi h}, \xi h)}{h} y(x),$$

که در آن $\phi(r, \alpha) = r - 1 - \frac{\alpha}{r}(r + 1)$ ، صدق می کند.

(ب) آیا از قسمت (الف)، سازگاری روش نتیجه می شود؟ جواب خود را به طور کامل تشریح کنید.

(پ) ناحیه پایداری مطلق روش را به دست آورید.

(۷) کرانی برای خطای سراسری (جامع) روش عددی

$$y_{n+1} = y_n + h \left[\frac{1}{2} f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f_n) - f_n \right], \quad n = 0, 1, \dots, N, \\ y_0 = y(x_0),$$

که در آن $f_n = f(t_n, y_n)$ ، به دست آورید.

(۸) (الف) نشان دهید روش k -گامی خطی

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j},$$

برای حل مساله مقدار اولیه (۱) سازگار است هرگاه

$$\rho(1) = 1, \quad \rho'(1) = \sigma(1).$$

(ب) مفاهیم سازگاری و صفر-پایداری یک روش k -گامی خطی را به طور دقیق توصیف کنید.

(۹) روش دوگامی ضمنی

$$y_{n+1} = \frac{4}{3}y_n - \frac{1}{3}y_{n-1} + \frac{2h}{3}f(x_{n+1}, y_{n+1}),$$

$$y_0 = y(x_0), \quad y_1 = y_0 + hf(x_1, y_0),$$

که در آن $h = (\bar{x} - x_0)/N$ و $x_n = x_0 + nh$ ، $n = 0, \dots, N$ ، برای حل مساله مقدار اولیه (۱) را در نظر بگیرید.

(الف) سازگاری روش را بررسی کنید. مرتبه دقت روش چند است؟

(ب) پایداری مطلق روش را بررسی کنید و ناحیه پایداری مطلق روش را به دست آورید.

(۱۰) روش چندگامی خطی

$$y_{n+4} - y_n + \alpha(y_{n+3} - y_{n+1}) = h[\beta(f_{n+3} - f_{n+1}) + \gamma f_{n+2}],$$

که در آن $f_n = f(t_n, y(t_n))$ ، $t_n = t_0 + nh$ ، $n = 0, \dots, N$ ، برای حل مساله مقدار اولیه (۱) را در نظر بگیرید. α ، β و γ را طوری بیابید که روش از مرتبه ۳ باشد. آیا روش صفر-پایدار است؟

(۱۱) نشان دهید مرتبه روش دوگامی خطی

$$y_{n+2} + 2ay_{n+1} - (2a+1)y_n = h((a+2)f_{n+1} + af_n),$$

در حالت کلی برابر ۲ است. سپس، ثابت خطای آن را بر حسب پارامتر a به دست آورید. همچنین، نشان دهید به ازای مقداری از a مرتبه روش برابر ۳ است اما روش در این حالت صفر-پایدار نیست.

«موفق باشید»